AL2 - Vecteurs

Séance de TD

- Corrigés des exercices -

CORRIGE DU QCM

1) La norme du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ vaut :

❍ 0 ❍ 2 ❍ $2\sqrt{5}$ ❶ $5\sqrt{2}$

2) Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont :

❍ colinéaires ❍ orthogonaux ❶ coplanaires ❍ aucun des trois

3) Un produit scalaire est forcément nul si les deux vecteurs sont :

❍ de même norme ❶ orthogonaux ❍ colinéaires ❍ coplanaires

4) Si deux vecteurs non nuls ont un produit vectoriel nul, alors ils sont :

❍ orthogonaux ❍ non coplanaires ❍ scalaires ❶ colinéaires

5) Deux vecteurs orthogonaux ont un produit scalaire …[1]… et un produit vectoriel …[2]… :

❍ [1] nul [2] nul ❍ [1] maximal [2] nul ❶ [1] nul [2] de norme maximale ❍ [1] maximal [2] de norme maximale

6) $(-\vec{u}) \wedge (-\vec{v}) = \ldots$

❶ $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ❍ $-(\vec{u} \wedge \vec{v})$ ❍ $\vec{v} \wedge \vec{u}$ ❍ $(-\vec{v}) \wedge (-\vec{u})$

7) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires et $\vec{w}$ est orthogonal au plan $(\vec{u}, \vec{v})$. Donc :

❍ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$ ❍ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ❶ $\vec{w} = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$ ❍ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe

8) Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$ sont… :

❍ de norme 1 ❍ orthogonaux ❍ colinéaires et de même sens ❶ colinéaires et de sens contraires

9) Si trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, alors :

❍ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{0}$ ❶ $(\vec{u} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{v} = 0$ ❍ $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = \vec{0}$ ❍ $(\vec{u} \wedge \vec{v}) = a\vec{w},\ a \in \mathbb{R}$

10) Appliqué à une fonction f, l'opérateur gradient permet de déterminer :

❶ la direction de plus forte variation de f ❍ la réciproque du divergent de f ❍ les points où f s'annule ❍ les valeurs extrêmes de f

11) L'opérateur divergent transforme un champ …[1]… en un champ …[2]…

❍ [1] scalaire [2] scalaire ❍ [1] scalaire [2] vectoriel ❶ [1] vectoriel [2] scalaire ❍ [1] vectoriel [2] vectoriel

1 GI FA 2015 – Test 2 – Calcul vectoriel

Dans l'espace usuel à trois dimensions muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les trois points A(-1, 0, 1), B(1, 1, -1) et C(0, 1, 1).

1) Justifier, grâce à l'outil vectoriel, que A, B et C ne sont pas alignés.

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

2) Calculer le produit vectoriel $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\wedge\overrightarrow{AB}$.

$$\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\wedge\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix}$$

3) Justifier que ce dernier est dans le plan ABC.

* première façon de le montrer : le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\wedge\overrightarrow{AB}$ doit être nul.

Vérifions : $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\wedge\overrightarrow{AB}\right)=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix}=6-12+6=0$

* deuxième façon :

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est orthogonal au plan ABC, et comme $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\wedge\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$, il est dans le plan (la direction planaire) ABC.

4) Cette fois-ci, les coordonnées du point C sont variables : C(x, y, z).

a. À quelle relation doivent obéir x, y, et z pour que $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\wedge\overrightarrow{AB}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AC}$?

$$\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\wedge\overrightarrow{AB}=\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x+1\\y\\z-1\end{pmatrix}\right)\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y+z-1\\-2x-2z\\-x+2y-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x-2y+4z+1\\-2x+8y+2z-4\\4x+2y+5z-1\end{pmatrix}$$

Pour que ce vecteur soit colinéaire à $\overrightarrow{AC}$, il faudrait remplir trois conditions impliquant les trois variables, ce qui serait long à simplifier.

Mais, comme $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\wedge\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, il faudrait que $\overrightarrow{AC}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, soit :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 2(x+1)+y-2(z-1)=0\Leftrightarrow x=\frac{-y+2z-4}{2}=-0,5y+z-2$$

b. Que vaudrait alors $\left(\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\wedge\overrightarrow{AB}\right)\wedge\overrightarrow{AC}$?

Ce serait le vecteur nul, puisque $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\wedge\overrightarrow{AB}$ serait colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.

2 GI FC18/26 2016 – Applications géométriques

Dans l'espace physique de dimension 3, muni d'un repère à angles droits dont l'unité est le mètre, on donne les quatre points A(6, 1, 0), B(1, 4, –1), C(–1, 2, 0), D(0, 2, 5). *Les résultats arrondis seront donnés avec une précision d'au moins trois décimales.*

1) Calculer l'aire du triangle ABC.

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-5\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-7\\1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-6\\1\\5\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\7\\16\end{pmatrix}$. $aire(\text{ABC})=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+7^2+16^2}\approx 8{,}746\text{ m}^2$

2) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

$$volume(\text{ABCD})=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}1\\7\\16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\1\\5\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{6}\times 81=13{,}5\text{ m}^3$$

3) En déduire la distance entre le point D et le plan ABC.

$$volume(\text{ABCD})=\frac{1}{3}\times aire(\text{ABCD})\times d \Leftrightarrow d=\frac{3\times volume}{aire}=\frac{3\times 13{,}5}{8{,}746}\approx 4{,}6305\text{ m}$$

3 GI FC34 2015 – Applications géométriques

On donne les trois vecteurs suivants : $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$. Ces coordonnées sont définies dans un repère spatial muni de trois axes formant des angles droits et dont les unités de longueurs sont identiques.

1) Calculer les normes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{1+4+4}=3,\quad \|\vec{v}\|=\sqrt{4+4+1}=3,\quad \vec{w}=\sqrt{4+1+4}=3$$

2) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$. Comparer ce dernier à $\vec{w}$ et en déduire l'orientation relative du vecteur $\vec{w}$ par rapport au plan $(\vec{u},\vec{v})$.

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+4\\4-1\\-2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\-6\end{pmatrix}=3\vec{w}$$

Le produit vectoriel étant orthogonal au plan de ces deux vecteurs, $\vec{w}$ l'est aussi.

3) Déterminer la valeur de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$. En déduire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ peuvent être positionnés sur trois arêtes d'un cube dont vous donnerez le volume.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=2-4+2=0$. Par définition, ces deux vecteurs sont orthogonaux.

Ces trois vecteurs sont donc orthogonaux deux à deux, et leur norme est identique : 3. Ils peuvent donc être représentés sur trois arêtes issues d'un même sommet d'un cube de côté 3,
dont le volume vaut 3^3 = 27.

4 GI FC18/26 2015 – Applications géométriques

Dans l'espace usuel de dimension 3 muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on définit les points A(-2, -6, 2), B(4, 2, -2), C(2, 8, 7) et D(2, 4, 15). Répondre aux questions suivantes par des méthodes vectorielles.

1) Calculer l'aire du triangle ABC.

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}6\\8\\-4\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}4\\14\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}96\\-46\\52\end{pmatrix}.\qquad \text{aire}(ABC)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{96^2+46^2+52^2}\approx 59,24.$$

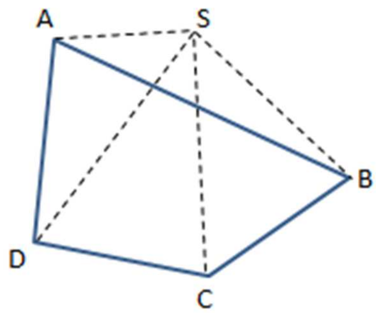
2) Ce triangle est-il rectangle ?

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}6\\8\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\9\end{pmatrix}=0.\ \text{Ce triangle est rectangle en B.}$$

3) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}96\\-46\\52\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\10\\13\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{6}\times 600=100.$$

5 GI FA 2014 test 2 – Applications géométriques



Dans l'espace muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, d'axes perpendiculaires sur lesquels l'unité est commune : 1 cm, on considère les points : A(3,1,3), B(2,3,2), C(3,3,1), D(4,2,1) et S(6,5,5). La figure ci-contre illustre schématiquement les positions relatives de ces points, en perspective, S étant situé au-dessus de A, B, C et D.
On utilisera <u>exclusivement l'outil vectoriel</u> pour traiter cet exercice.

1) a. Montrer que les segments [AC] et [BD] sont orthogonaux.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}=-2+2=0$$

b. Montrer que le triangle ABD est isocèle en A.

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}\quad ;\quad \left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$$

c. Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

$$\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=-2-2+4=0$$

2) a. Calculer l'aire du quadrilatère convexe ABCD (en le découpant en deux triangles).

* Découpons-le en les triangles ABC et ACD :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}.\ \text{Aire de ABC : }\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+4}=\sqrt{3}$$

$\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. Aire de ACD = aire de ABC $=\sqrt{3}$

L'aire du quadrilatère ABCD est donc $2\sqrt{3}$ cm².

* On peut aussi considérer le quadrilatère comme partitionné en les triangles ABD et CBD :

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}$. Aire de ABD : $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{9+9+9}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$. Aire de CBD : $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{CD}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+1+1}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

L'aire du quadrilatère ABCD est donc $2\sqrt{3}$ cm².

b. Calculer le volume du tétraèdre ABCS.

On prendra ici, par exemple, trois vecteurs issus du point A.

Volume du tétraèdre ABCS : $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AS}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}=\frac{18}{6}=3\text{ cm}^3$.

c. Calculer le volume de la pyramide ABCDS.

* le plus direct est d’additionner les volumes des tétraèdres ABCS et ACDS.
On a pu remarquer (question 2a) que les triangles ABC et ACD ont la même aire ; de plus, ils sont situés dans un même plan. Donc les volumes des tétraèdres sont égaux.
Ainsi, le volume de la pyramide ABCDS est le double de celui du tétraèdre ABCS, soit 6 cm^3.

* toujours en souhaitant additionner les volumes des tétraèdres ABCS et ACDS :

Pour ACDS : $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AS}\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}\right|=\frac{|-18|}{6}=3\text{ cm}^3$.

Le volume de la pyramide ABCDS est donc 3 cm^3 + 3 cm^3 = 6 cm^3.

* On peut aussi additionner les volumes des tétraèdres ABDS et CBDS :

Volume du tétraèdre ABDS : $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AS}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}=\frac{27}{6}=4.5\text{ cm}^3$.

Volume du tétraèdre CBDS : $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{CS}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}=\frac{9}{6}=1.5\text{ cm}^3$.

Le volume de la pyramide ABCDS est donc 6 cm^3.

6 GI FC34 2014 – Applications géométriques

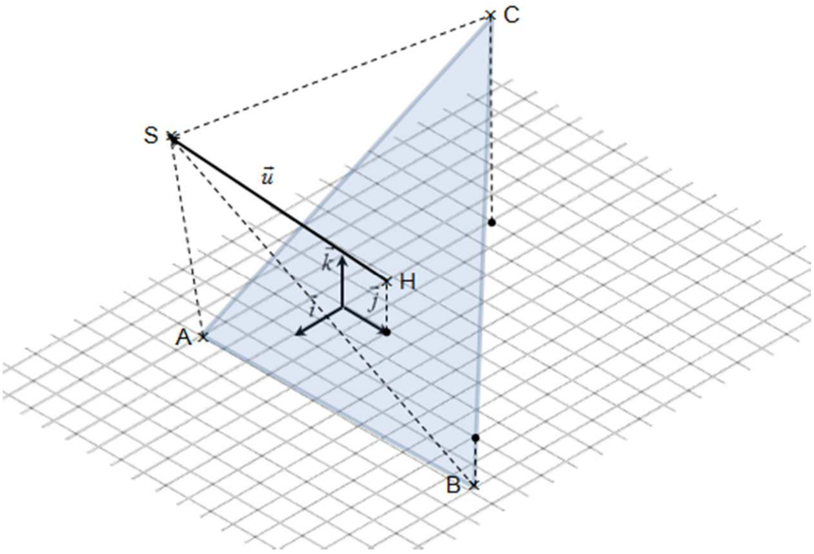
Soit, dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points A(2 ; -1 ; 0), B(1 ; 4 ; -1) et C(-3 ; 0 ; 4).

1) Placer les points A, B, C dans la figure ci-dessous, puis compléter cette figure au fil de l'exercice.

2) Calculer l'aire du triangle ABC.

$\mathcal{A}(\mathrm{ABC}) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-5\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\9\\24\end{pmatrix}$. $\mathcal{A}(\mathrm{ABC}) = \frac{1}{2}\sqrt{21^2+9^2+24^2}\approx 16{,}57$ cm².

figure



3) a. Donner un vecteur orthogonal au plan ABC.

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}21\\9\\24\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan ABC.

b. Vérifier que le vecteur $\vec{u}=\begin{pmatrix}7\\3\\8\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan ABC.

$\vec{u}=\begin{pmatrix}7\\3\\8\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$, CQFD.

4) a. Vérifier que le point H(0 ; 1 ; 1) appartient au plan ABC.

Vérifions, par exemple, que le produit mixte $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AH}$ est nul :

$\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AH}=\begin{pmatrix}21\\9\\24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=-42+18+24=0$. Les points A, B, C et H sont coplanaires.

b. Soit le point S tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OH} + \vec{u}$. Calculer le volume du tétraèdre ABCS.

$$\mathcal{V}(\text{ABCS}) = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}21\\9\\24\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5\\5\\9\end{pmatrix} = \frac{1}{6} \times 366 = 61 \text{ cm}^3.$$

c. D'après ce qu'on a défini au-dessus, le segment [HS] est une hauteur du tétraèdre ABCS, en prenant pour base le triangle ABC. Vérifier le volume de ce tétraèdre par la formule $V = \frac{1}{3}\text{base}\times\text{hauteur}$.

$$V = \frac{1}{3}\text{base}\times\text{hauteur} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{ABC}) \times \left\|\vec{u}\right\|$$

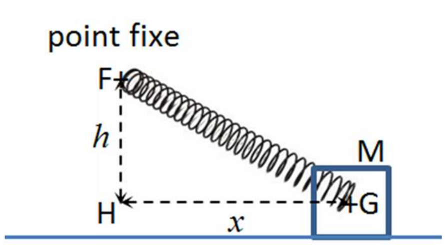
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{21^2 + 9^2 + 24^2} \times \sqrt{7^2 + 3^2 + 8^2} = \frac{1}{6}\sqrt{1098} \times \sqrt{122} = \frac{1}{6}\sqrt{133956} = \frac{1}{6} \times 366 = 61$$

7 GI FA 2016 test 2 – Calcul vectoriel et intégral

Une masse M peut glisser sans frottement sur un plan horizontal. Un ressort est fixé au centre de gravité G de la masse M et à un point F immobile situé à une distance h de la ligne de déplacement horizontale de G. (voir figure : h = HF)

h est également la longueur du ressort au repos, si bien que lorsque G est à la verticale de F, en H, la masse M ne subit aucune force de la part du ressort.

Lorsque G n'est pas à la verticale de F, on notera x leur décalage horizontal et a l'allongement du ressort : FG = $h + a$.



1) Le vecteur tension $\vec{T}$ du ressort sur la masse M a pour norme $k \times a$, (k : raideur du ressort). Exprimer la tension du ressort (donc cette norme) en fonction de x.

La longueur du ressort vaut $h + a$; par application du théorème de Pythagore :

$h^2 + x^2 = (h + a)^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{h^2 + x^2} - h$. Donc $T = k\left(\sqrt{h^2 + x^2} - h\right)$.

2) On envisage un déplacement horizontal de la masse M. Lors d'un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dx}$, le travail reçu par la masse de la part du ressort est un produit scalaire : $dW = \vec{T} \cdot \overrightarrow{dx}$.

Montrer que $dW = kx\left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}} - 1\right).dx$.

$dW = \vec{T} \cdot \overrightarrow{dx} = \left\|\vec{T}\right\| \times |dx| \times \cos\left(\vec{T}, \overrightarrow{HG}\right)$ (1) Soit α l'angle géométrique FGH.

1ère situation : comptons dx positif (déplacement vers la droite). L'expression (1) devient alors :

$$dW = \vec{T} \cdot \overrightarrow{dx} = T \cdot dx \times \cos(\pi\text{-}\alpha) = -T \cdot dx \times \cos\alpha = -T \cdot dx \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = -k\left(\sqrt{h^2 + x^2} - h\right)\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}dx$$

$$= kx\left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}} - 1\right).dx$$

2ème situation : comptons dx négatif (déplacement vers la gauche). L'expression (1) devient alors :

$$dW = \vec{T} \cdot \overrightarrow{dx} = T \cdot (-dx) \times \cos\alpha = -T \cdot dx \times \cos\alpha = -k\left(\sqrt{h^2 + x^2} - h\right)\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}dx = kx\left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}} - 1\right).dx$$

On retrouve donc bien la même formule.

3) On étire le ressort jusqu'à une distance x = 1, puis on lâche la masse M. Calculer le travail fourni par le ressort, de ce point de départ jusqu'au point H, à savoir le nombre : $W = \int_1^0 \mathrm{d}W$.

$$\int_1^0 \mathrm{d}W = k\int_1^0 \left(\frac{xh}{\sqrt{h^2+x^2}} - x \right).\mathrm{d}x = k\left[h\sqrt{h^2+x^2} - \frac{x^2}{2} \right]_1^0 = k\left(h^2 - h\sqrt{h^2+1} + \frac{1}{2} \right)$$

8 Gradient et différentielle

Soit une fonction f qui, à tout point M de l'espace, repéré par ses cordonnées x, y et z, associe le nombre réel $f(x, y, z)$.

Un point M étant donné, considérons un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{\mathrm{dV}} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{dz} \end{bmatrix}$ de ce point.

1) Que représente le produit scalaire $\overrightarrow{grad}(f) \cdot \overrightarrow{\mathrm{dV}}$?

$$\overrightarrow{grad}(f) \cdot \overrightarrow{\mathrm{dV}} = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{dz} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \mathrm{dz}$$

On reconnaît la différentielle de la fonction f des trois variables x, y et z. $\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{grad}(f) \cdot \overrightarrow{\mathrm{dV}}}$

2) Que peut-on dire de la variation de f(M) <u>au voisinage de M</u> dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{grad}(f)$?

Cela signifie que l'on a $\overrightarrow{\mathrm{dV}} \perp \overrightarrow{grad}(f)$.

Or, le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul :

$$\overrightarrow{\mathrm{dV}} \perp \overrightarrow{grad}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{grad}(f) \cdot \overrightarrow{\mathrm{dV}} = 0 .$$

Donc, lorsque le déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{dV}}$ s'effectue dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{grad}(f)$ on a : $\mathrm{d}f$ = 0.

Ainsi, au voisinage de M, dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{grad}(f)$, la fonction f est constante. C'est la notion d'équipotentielle utilisée en électrostatique.

9 GI FC18/26 2013 – Test – calcul vectoriel, divergent

Soit le vecteur fixé $\vec{\mathrm{U}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur variable $\vec{\mathrm{V}} = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yx^2 \end{pmatrix}$.

1) Étudier les possibilités, pour x et y, qui rendent le produit scalaire $\vec{\mathrm{U}} \cdot \vec{\mathrm{V}}$ nul.

$\vec{\mathrm{U}} \cdot \vec{\mathrm{V}} = 0 \Leftrightarrow xy^2 + yx^2 = 0 \Leftrightarrow xy(x+y) = 0$.

Il y a donc trois possibilités : x = 0, ou y = 0, ou y = - x.

2) L'*opérateur nabla* est $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix}$ et le *divergent* d'un vecteur $\vec{\mathrm{V}}$ est $div\vec{\mathrm{V}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{V}}$.

En reprenant le vecteur $\vec{\mathrm{V}}$ défini en début d'exercice, déterminer l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $\mathrm{div}\vec{\mathrm{V}} = 1$.

$\operatorname{div}\vec{V}=\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=\dfrac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial x}+\dfrac{\partial\left(yx^2\right)}{\partial y}=y^2+x^2$.

$\operatorname{div}\vec{V}=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1\Leftrightarrow$ le point (x, y) parcourt le cercle de centre O et de rayon 1.

3) Quels sont donc des points (x, y) du plan tels que $\operatorname{div}\vec{V}=1$ et $\vec{U}\cdot\vec{V}=0$?

Sachant que $x^2+y^2=1$ est une condition nécessaire :

* Le cas $x = 0$ conduit à $y = \pm 1$, tandis que cas $y = 0$ conduit à $x = \pm 1$

* le cas $y = -x$ donne, en substituant, deux possibilités : [$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et donc $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$]

ou [$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et donc $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$].

10 GI FA 2011 – test 2 – divergent, rotationnel

On modélise, ici en deux dimensions, l'écoulement d'un fluide par son champ de vecteurs vitesse : en tout point $M(x, y)$ du domaine du plan considéré, on exprime les coordonnées du vecteur vitesse du fluide en fonction de celles de M par :

$$\vec{V}(M)=\begin{pmatrix}V_x\\V_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\dfrac{y}{10}\ln(x+1)\\x^2y\end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de M sont exprimées en mètres et de plus $x\in[0\,;2]$ et $y\in[0\,;1]$.

Les coordonnées V_x et V_y de $\vec{V}(M)$ sont exprimées en mètres par seconde.

On rappelle que $div\vec{V}=\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ et que $\overrightarrow{rot}\vec{V}=\vec{\nabla}\wedge\vec{V}$ où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur $\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\end{pmatrix}$ (ici en dimension 2). On n'oubliera pas qu'un produit vectoriel se pose en trois dimensions.

1) Donner le vecteur vitesse au point $O(0, 0)$ et celui au point $A(2, 1)$. Calculer leurs normes, à donner avec l'unité adéquate.

$\vec{V}(O)=\begin{pmatrix}2-\dfrac{0}{10}\ln(0+1)\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$; $\left\|\vec{V}(O)\right\|=2\text{ m.s}^{-1}$;

$\vec{V}(A)=\begin{pmatrix}2-\dfrac{1}{10}\ln(3)\\4\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1{,}89\\4\end{pmatrix}$; $\left\|\vec{V}(A)\right\|\approx\sqrt{1{,}89^2+4^2}\approx 4{,}424\text{ m.s}^{-1}$.

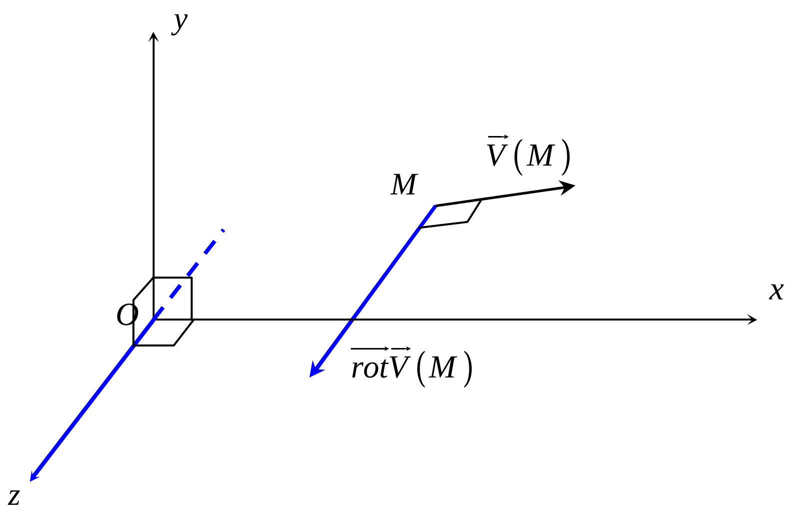
2) Déterminer les expressions des quatre dérivées partielles $\dfrac{\partial V_x}{\partial x},\dfrac{\partial V_x}{\partial y},\dfrac{\partial V_y}{\partial x},\dfrac{\partial V_y}{\partial y}$.

$\dfrac{\partial V_x}{\partial x}=\dfrac{-y}{10(x+1)},\quad \dfrac{\partial V_x}{\partial y}=\dfrac{-\ln(x+1)}{10},\quad \dfrac{\partial V_y}{\partial x}=2xy,\quad \dfrac{\partial V_y}{\partial y}=x^2.$

3) a. Donner le rotationnel de $\vec{V}$.

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2-\frac{y}{10}\ln(x+1) \\ x^2 y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2xy+\frac{\ln(x+1)}{10} \end{pmatrix}.$$

b. Faire un schéma succinct, en trois dimensions, dans lequel doivent apparaître un repère direct (O, x, y, z), un point M du plan (O, x, y), son vecteur vitesse et son vecteur rotationnel conformes aux données et résultats de l'exercice.



4) a. Donner l'expression du divergent de $\vec{V}$. En quelle unité s'exprime-t-il ?

$$div\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-\frac{y}{10}\ln(x+1) \\ x^2 y \end{pmatrix} = \frac{-y}{10(x+1)} + x^2$$. Il s'exprime en s^{-1}.

b. Calculer ce divergent au point O et au point A.

$$div\vec{V}(O) = \frac{-0}{10(0+1)} + 0^2 = 0 \quad ; \quad div\vec{V}(A) = \frac{-1}{10(2+1)} + 2^2 \approx 3{,}967.$$

c. Que signifie un divergent positif ?

Un divergent (d'un champ de vitesses) positif en un point signifie qu'à travers une sphère de rayon infinitésimal construite autour de ce point, le flux de particules est globalement sortant.

d. Déterminer l'ensemble des points du plan (O, x, y) où le divergent est nul.

$$div\vec{V}(M) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-y}{10(x+1)} + x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10x^2(x+1)-y}{10(x+1)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10x^2(x+1) - y = 0$$ car le dénominateur ne peut s'annuler sur notre domaine d'étude. Il s'agit de l'équation d'une courbe.